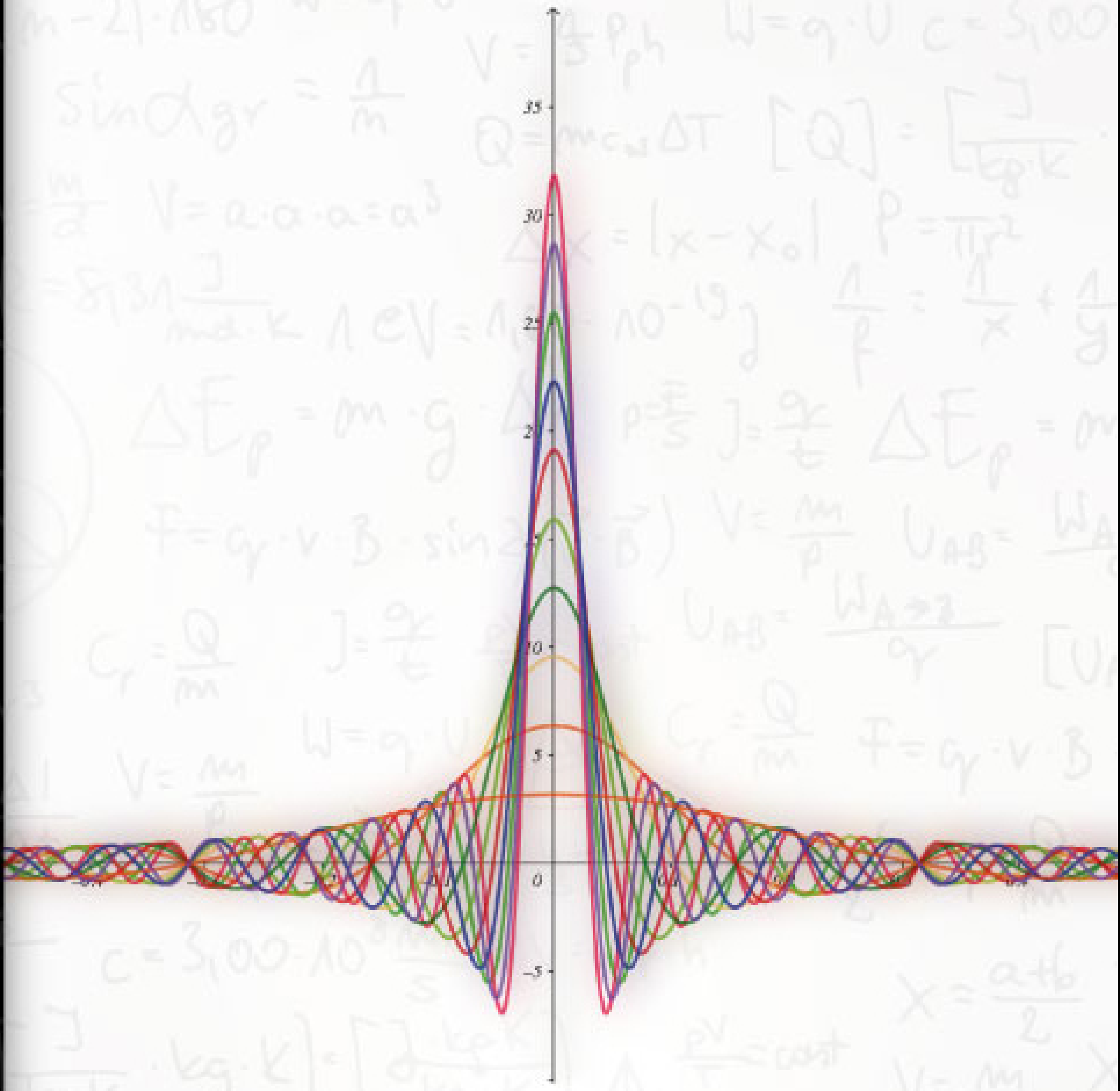
Matemáticas especiales para ingeniería - Fundamentos | Jaleydi Cárdenas Poblador - Beatriz Rojas García

Matemáticas especiales para ingeniería - Fundamentos



Jaleydi Cárdenas Poblador
Beatriz Rojas García

Editorial Unillanos

Matemáticas especiales para Ingeniería

Fundamentos

Jaleydi Cárdenas Poblador
Beatriz Rojas García

Departamento de Matemáticas y Física
Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería

Editorial Unillanos

Cárdenas Poblador, Jaleydi
Matemáticas especiales para ingeniería - Fundamentos / Jaleydi Cárdenas Poblador, Beatriz Rojas García. -- Villavicencio, Meta: Editorial Universidad de los Llanos, 2023.

364 páginas: gráficas, tablas, diagramas
Incluye referencias bibliográficas (341-342 pp.).
ISBN DIGITAL: 978-958-8927-95-4

1. Matemáticas en ingeniería – 2. Transformaciones de Laplace – 3. Ecuaciones diferenciales – 4. Análisis de Fourier.
CDD 515.723 ed. 23
Catalogación en la publicación – Universidad de los Llanos, Biblioteca Jorge Boshell Manrique.

Primera edición 2023

Matemáticas especiales para ingeniería - Fundamentos

© Jaleydi Cárdenas Poblador https://orcid.org/0000-0002-9367-8683
© Beatriz Rojas García https://orcid.org/0000-0002-4030-0687

ISBN digital: 978-958-8927-95-4

Coordinación editorial: Ana María Lombana Gracia
Diseño de cubierta y diagramación: Mario A. Calderón Collazos
Corrección de estilo: Andrés Mantilla Meluk

Editorial Unillanos
Calle 37 # 41-02 Barzal - Sede San Antonio
editorialunillanos@unillanos.edu.co
https://editorial.unillanos.edu.co
Villavicencio, Meta

Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad de los Llanos la oportunidad de orientar el curso de Matemáticas Especiales de los programas de Ingeniería de Sistemas e Ingeniería Electrónica, de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería, durante los últimos años. Además, agradecemos los aportes y sugerencias del profesor Edison Sabogal y de todos los estudiantes que de una u otra forma contribuyeron al proceso de elaboración de este libro.

Índice general

Agradecimientos **V**

Introducción **XIX**

Glosario de notación **XVII**

1. Transformada de Laplace **1**

1.1. Generalidades 2

Ejercicios 14

1.2. Transformada de Laplace de una derivada 15

Ejercicios 20

1.3. Teoremas de traslación 21

1.3.1. Traslación con respecto al eje s 21

Ejercicios 24

1.3.2. Traslación con respecto al eje t 25

Ejercicios 31
1.4. Derivada de la transformada de Laplace 32
Ejercicios 38
1.5. Transformada de Laplace de integrales 39
Ejercicios 44
1.6. Transformada de Laplace de funciones periódicas . . . 45
Ejercicios 47
1.7. Distribución delta de Dirac y transformada de Laplace 48
Ejercicios 53
1.8. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales 53
Ejercicios 55
1.9. Ejercicios del capítulo 56

2. Cálculo en variable compleja 61

2.1. Números complejos 62
Ejercicios 69
2.2. Representación geométrica de números complejos . . . 70
Regiones en el plano complejo 71
Ejercicios 75
2.3. Forma polar de los números complejos 77
2.3.1. Producto y cociente de números complejos en forma polar 80
2.3.2. Raíces de números complejos 82

Ejercicios 85

2.4. Funciones de variable compleja 86

Ejercicios 89

2.4.1. Límites de funciones de variable compleja 89

Ejercicios 94

2.4.2. Continuidad de funciones de variable compleja . 95

Ejercicios 97

2.5. Derivabilidad y analiticidad 98

2.5.1. Derivabilidad de funciones de variable compleja 98

Ejercicios 101

2.5.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann y derivabilidad 102

Ejercicios 108

2.5.3. Funciones analíticas 109

Ejercicios 111

2.6. Funciones elementales complejas 111

2.6.1. Función exponencial compleja 111

Ejercicios 116

2.6.2. Función logaritmo compleja 116

Ejercicios 121

2.6.3. Exponentes complejos 122

Ejercicios 125

2.6.4. Funciones trigonométricas complejas 125

2.6.5. Funciones hiperbólicas complejas 133
Ejercicios 136
2.7. Integración compleja 136
2.7.1. Funciones de variable real y valor complejo . . . 136
2.7.2. Funciones de variable y valor complejos 139
Ejercicios 156
2.8. Sucesiones y series complejas 158
2.8.1. Sucesiones complejas 158
2.8.2. Series complejas 159
Ejercicios 172
2.9. Singularidades y teorema del residuo 173
2.9.1. Clasificación de las singularidades aisladas . . . 175
2.9.2. Teorema del residuo 177
2.9.3. Residuos en polos 180
Ejercicios 185
2.10. Ejercicios del capítulo 186

3. Análisis de Fourier **193**
3.1. Series de Fourier 194
3.1.1. Serie de Fourier en un intervalo simétrico $[-L, L]$ 195
Ejercicios 200
3.1.2. Convergencia de la serie de Fourier 201
Ejercicios 206

3.1.3. Serie de Fourier en cosenos y en senos 207
Ejercicios 214
3.1.4. Funciones periódicas especiales 214
3.1.5. Forma de ángulo fase de la serie de Fourier . . . 218
Ejercicios 223
3.1.6. Forma compleja de la serie de Fourier 225
Ejercicios 229
3.1.7. Integración de la serie de Fourier 230
3.1.8. Derivación de la serie de Fourier 234
3.2. Transformada de Fourier 239
3.2.1. Integral de Fourier 239
Ejercicios 241
3.2.2. Integral de Fourier en cosenos y en senos 242
Ejercicios 245
3.2.3. Integral de Fourier compleja y transformada de Fourier 246
Ejercicios 252
3.2.4. Función de Heaviside 252
3.2.5. Teoremas de traslación 254
3.2.6. Propiedades de la transformada de Fourier . . . 256
Ejercicios 258
3.2.7. Transformada de Fourier de una derivada 259
3.2.8. Derivada de la transformada de Fourier 263

3.2.9. Transformada de Fourier de integrales 265
3.2.10. Distribución delta de Dirac y transformada de Fourier 268
3.2.11. Elementos de análisis de Fourier discreto 269
3.3. Ejercicios del capítulo 274

A. Apéndice **279**
A.1. Definiciones 279
A.2. Algunos criterios de convergencia de series reales 281
A.3. Demostraciones 282
A.4. Deducción de los coeficientes de la serie de Fourier . . . 288

B. Respuestas y soluciones a algunos ejercicios **291**

Índice alfabético **335**

Índice de figuras

1.1. Pierre-Simon Laplace. 1

1.2. Función escalón unitario o de Heaviside. 25

1.3. Onda cuadrada. 46

1.4. Función serpenteante. 47

1.5. Función triangular. 47

1.6. Función diente de sierra. 48

1.7. Función rectificación completa de la onda $\operatorname{sen} t$. 48

1.8. Función impulso unitario $\delta_a(t - t_0)$. 49

1.9. Representación gráfica de $\lim\limits_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)$. 50

1.10. Representación gráfica del movimiento armónico simple para un sistema masa-resorte. 58

2.1. Augustin Louis Cauchy. 61

2.2. Representación del número complejo z en el plano complejo. 71

2.3. Representación geométrica de $z_1 + z_2$. 71

2.4. Distancia entre z_1 y z_2. 72

2.5. Representación gráfica de $|z - z_0| = r$. 72

2.6. Representación gráfica de $|z - z_0| \leq r$. 73

2.7. Representación gráfica de $|z - z_0| < r$. 73

2.8. Representación geométrica de $|z - 6i| = |z - (1 - 3i)|$. 75

2.9. Representación geométrica de $|z - 6i| < |z - (1 - 3i)|$. 76

2.10. Representación geométrica de $|z - 6i| \geq |z - (1 - 3i)|$. 76

2.11. Representación polar del número complejo $z = x + iy$. . 77

2.12. Representación de las raíces quintas de la unidad. . . . 84

2.13. Representación gráfica de $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. 90

2.14. Trayectorias para analizar el $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}}$. 93

2.15. Trayectorias para analizar el $\lim_{z \to 0} \frac{Re(z)Im(z)}{|z|^2}$. 94

2.16. Representación gráfica de: (A) curva simple, (B) curva no simple, (C) curva cerrada simple, (D) curva cerrada no simple. 140

2.17. Representación gráfica del contorno C. 141

2.18. Representación gráfica de la curva $C : z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 142

2.19. Representación gráfica del contorno $C : z(t) = t + i(i - 1), \quad 1 \leq t \leq 2$. 144

2.20. Representación gráfica del contorno $C : z(t) = it, \quad -4 \leq t \leq -1$. 145

2.21. Representación gráfica del triángulo C con vértices 0, $1+i$ e i. 145

2.22. Representación gráfica de la curva $C : z(t) = 2e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. 147

2.23. Conjunto múltiplemente conexo del principio de deformación generalizado. 149

2.24. Representación gráfica de la curva $C : z(t) = 2i + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 150

2.25. Contorno del numeral 5 del ejemplo 149. 152

2.26. Contorno del numeral 1 del ejemplo 149. 153

2.27. Contorno del numeral 2 del ejemplo 149. 153

2.28. Contorno del numeral 3 del ejemplo 149. 154

2.29. Contorno del numeral 4 del ejemplo 149. 154

2.30. Contorno de la solución del numeral 5 del ejemplo 149. 155

2.31. Contorno cerrado no simple. 158

2.32. Radio y disco de convergencia. 162

2.33. Anillo de convergencia. 169

2.34. Ilustración de la demostración del teorema del residuo. 178

3.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier. 193

3.2. Función $f(x)$ del ejemplo 187. 202

3.3. Función $f'(x)$ del ejemplo 187. 202

3.4. Interpretación geométrica de las derivadas laterales. . . 205

3.5. Extensión par de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 2]$. 208

3.6. Extensión impar de $f(x)$. 212

3.7. Función simétrica de media onda. 215
3.8. Función simétrica de cuarto de onda par. 215
3.9. Función simétrica de cuarto de onda impar. 216
3.10. Función periódica con una simetría escondida. 216
3.11. Función $h(x) = f(x) - \frac{k}{2}$. 217
3.12. Función onda cuadrada. 217
3.13. Gráfica de la función periódica $f(x) = x^2$ con $T = 3$. . 221
3.14. Espectro de amplitud de la función $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$. 223
3.15. Función periódica del ejercicio 6. 224
3.16. Función periódica del ejercicio 7. 224
3.17. Función periódica del ejercicio 8. 225
3.18. Función rectificación completa de la onda de seno: $f(x) = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi$. 227
3.19. Espectro de amplitud de la rectificación de onda de seno: $f(x) = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi$. 229
3.20. Función periódica del ejercicio 8. 230
3.21. Función periódica del ejercicio 9. 230
3.22. Función del ejemplo 226. 240
3.23. Espectro de amplitud de la función del ejemplo 242. . . 251
3.24. Función de Heaviside. 253
3.25. Gráfica de $f(t) = k\,[H(t + a) - H(t - a)]$. 253
3.26. Función del ejercicio 4 ítem c. 276
3.27. Función periódica del ejercicio 5 ítem d. 276

Glosario de notación

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$\mathcal{L}\{f\}$	Transformada de Laplace de la función f.
$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	Transformada inversa de Laplace de la función f.
$\mathcal{U}(t-a)$	Función escalón unitario, centrado en a.
$f * g$	Convolución entre las funciones f y g.
$\delta_a(t-t_0)$	Función impulso unitario, centrada en t_0 con radio a.
$\delta(t-t_0)$	Distribución delta de Dirac, centrada en t_0.
$\|z\|$	Módulo del número complejo z.
$\overline{z}$	Conjugado del número complejo z.
$\mathcal{F}[f(t)]$	Transformada de Fourier de la función f.
$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f}(\omega)\right](t)$	Transformada inversa de Fourier de la función f.
$H(t)$	Función de Heaviside.
$\delta_a(t)$	Función escalón.
$\delta(t)$	Distribución delta de Dirac, centrada en 0.

Introducción

Tradicionalmente, algunos programas de Ingeniería incluyen en su planeación curricular un curso de Matemáticas Especiales, como un complemento a la formación básica en Matemáticas (Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Multivariado, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal), lo cual es necesario para abordar el componente profesional en áreas como control análogo y digital, sistemas de comunicación, procesos estocásticos, procesamiento de señales e imágenes, modelamiento de sistemas y mecánica cuántica, entre otras.

Producto de la experiencia de las autoras orientando el curso de Matemáticas Especiales para los estudiantes de los programas de Ingeniería de Sistemas e Ingeniería Electrónica de la Universidad de los Llanos, surge esta propuesta de texto guía para dicho curso.

El presente texto guía está organizado en tres capítulos: Transformada de Laplace, Cálculo en variable compleja y Análisis de Fourier. En el capítulo 1, se presentan generalidades de la transformada de Laplace y los teoremas de traslación. Se expone la relación de la trasformada de Laplace con la derivada y la integral (teorema de convolución), así como la transformada de funciones periódicas y de distribuciones. El estudio está orientado principalmente a la solución de problemas de valor inicial con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

En el capítulo 2, se presentan elementos de cálculo en el conjunto de los números complejos, desde la estructura algebraica y geométrica, pasando por funciones algebraicas de variable y valor complejo, límites y continuidad. Posteriormente, se estudia la analiticidad de una función como un concepto más general que el de derivabilidad. A continuación, se estudian las funciones elementales de variable compleja: exponencial, logarítmica, trigonométricas e hiperbólicas; luego se calculan integrales complejas desde la definición, usando teoremas como el de Cauchy-Goursat y el de la fórmula integral de Cauchy. El capítulo concluye con el estudio de sucesiones y series en variable compleja, así como con el tratamiento de singularidades y el teorema del residuo.

Por último, el capítulo 3 está dedicado al estudio del análisis de Fourier. En el primer apartado se tratan las diferentes formas, propiedades y convergencia de las series de Fourier, con un par de secciones dedicadas a la diferenciación e integración de las series de Fourier. En seguida, se estudian las diferentes formas de la integral de Fourier, teoremas de traslación y convergencia, transformada de funciones definidas por partes y distribuciones, así como la relación entre la transformada y los procesos de derivación e integración. Finalmente, se presentan algunos elementos del análisis de Fourier discreto.

Si bien es cierto que los capítulos se pueden estudiar de manera independiente, el capítulo 3 requiere algunas nociones de números complejos y por esta razón se sugiere el orden propuesto.